Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm
gunnar@taljaren.se

mars 2007

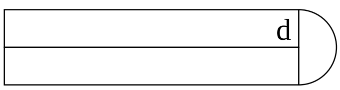
Täljaren är en liten skrift om matematik och matematikundervisning. Jag uppmanar läsarna att höra av sig med egna funderingar och tankar eller intressanta saker som kommit upp i klassrummet. Allt för att stimulera till eftertanke och kompetensutveckling. Alla bidrag är välkomna.

1 Från förra numret

I förra numret utlovade jag att ta upp pappersvikning igen. Vi skall nu betrakta det enklaste fallet. Detta är när vi viker pappret i endast en riktning (d.v.s. bredden kommer vara den samma men längden kommer att minska). På nätet fann jag en formel för minimilängden, L, som krävs för att man skall kunna vika ett papper n gånger på mitten. Den löd

$$L = \frac{\pi d}{6}\left(2^n + 4\right)\left(2^n - 1\right)$$

där d är papprets tjocklek och n antalet vikningar. Vi skall nu härleda formeln. För att kunna göra detta måste vi antaga att pappret uppför sig på det sätt som jag skall beskriva nu, när vi viker det.



Figur 1: En vikning.

Det som sker vid den första vikningen är att pappret bildar en halvcirkel, om än väldigt liten. Detta illustreras i figur 1. Bågländen för denna halvcirkel är πd. Den andra vikningen

Figur 2: Två vikningar.

ger en ny halvcirkelformad del, se figur 2. Denna anser vi bestå av två cirkelbågar. Radierna för dessa är d respektive $2d$. Den båglängd som denna nya del har är $\pi(d + 2d)$. Till detta har vi den ursprungliga bågen.

När vi skall vika den tredje gången har materialet en tjocklek på 4 lager. Efter vikningen kommer vi ha 4 nya cirkelbågar med radierna d, $2d$, $3d$ och $4d$. Båglängden för detta tillskott är $\pi(d+2d+3d+4d) = \pi d(1+2+\ldots+2^{3-1})$. Vi skönjer ett mönster här. Vid den $n:te$ vikningen erhåller vi ett längdbidrag på $\pi(1+2+3+\ldots+2^{n-1})d$. Vi summerar över antalet vikningar, n vilket ger oss

$$L = \sum_{k=1}^{n} \pi(1+2+3+\ldots+2^{k-1})d =$$

$$\pi d \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}(2^{k-1}+1)}{2} = \frac{\pi d}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(4^{k-1}+2^{k-1}\right) =$$

Detta är två geometriska summor, och vi får

$$\frac{\pi d}{2}\left(\frac{4^n-1}{4-1}+\frac{2^n-1}{2-1}\right) = \frac{\pi d}{2}\left(\frac{4^n-1}{3}+3\cdot\frac{2^n-1}{3}\right) =$$

$$\frac{\pi d}{6}\left(4^n - 1 + 3\cdot 2^n - 3\right) = \frac{\pi d}{6}\left(2^n+4\right)\left(2^n-1\right)$$

Detta är formeln vi sökte. Observera att antalet lager papper efter n vikningar är 2^n men att längden på kanterna är av storleksordningen 4^n.

Ett A4 papper har en tjocklek på c:a 0,01 cm och efter 7 vikningar har

$$\frac{0.01\pi}{6}(2^7+4)(2^7-1) \approx 88 \text{ cm}$$

förbrukats till dessa vikningar (enligt denna modell). 10 vikningar innebär att 55 m går åt.

2 LMS

Lunds matematiska sällskap håller tre möten i vår

28 februari höll Lars Gårding föredraget "*Lämmelgåtan*".

28 mars håller Magnus Fontes föredraget "*Pour l'honneur de l'esprit humain*". Föredraget hålls dock på svenska.

9 maj håller Gert Almkvist föredraget "*Månghörningar*".

Mer information om vad föredragen kommer att behandla finns på `http://www.matematik.lu.se/LMS`.

Lars Gårdings föredrag var trevligt (vad annat kan man förvänta sig?) och efteråt var det sittning med den lämpliga rätten lämmelgryta.

3 Matematiken i verkligheten?

Det klagas ibland över att matematiken inte är verklighetsanknuten. De flesta behöver dock inte mer än de fyra räknesätten, eventuellt lite area- och volymberäkningar av rektanglar och rätblock för att överleva i vardagen. Ordet procent används oftare men knappast i samband med beräkningar. Det finns ingen större mening med algebran, rita grafer eller lösa ekvationer ifall man vill ha matematik som man har någon nytta av i vardagen. Matematiken blir (och är) för matematikens egna skull. Dock är matematiken till stor nytta för att förklara det vi kan observera runt omkring oss, t.ex. de arktiska smågnagarnas periodiska förekomst (enligt Lars Gårding).

För att ha någon som helst nytta av matematiken i vardagen (utöver den mest elementära aritmetiken) så tror jag att man måste ha rejält med fantasi och låta bli att leta efter något man kan räkna på. Låt istället dessa tillfällen hitta dig.

Här följer några tankar som har dykt upp i olika situationer, i verkligheten.

Lösningsförslag får du gärna skicka in för publicering eller så kan du berätta hur eleverna har tacklat problemen. Håll tillgodo!

3.1 Biljettpris

På bussarna i Lund kostar en resa i skrivande stund 9,60 kr om du betalar med rabattkort. Brukligt är att ladda sitt rabattkort med 100 kr eller 200 kr. Ponera att du bara har åkt buss i Lund och du har kvar 20,40 kr på kortet. Frågan är då: har de ändrat biljettpriset någon gång sedan du började åka med det rabattkortet?

3.2 Biljettpris och procent

Det här är en favorit. Du får rabatt (ett visst antal procent) på dina resor i Skåne om du betalar med rabattkort. Vad kostar det att resa utan rabattkort ifall resan kostar exakt 58,40 kr inklusive rabatten?

3.3 Brödkakor

När vi ändå har pratat om att handla mat i affären så kan vi passa på att nämna följande: "28% fler brödkakor i påsen" står det på en förpackning. Hur många brödkakor får du om du köper påsen?

4 κappa 2007

I Theducations tävling för matematiklärare har nu första frågan publicerats. Den lyder som följer.

> En seven-eleven-affär bestämmer sig för att all betalning i affären skall ske med poletter som man säljer för 7 kronor och 11 kronor. Någon växel ges ej.
>
> Vilket är det högsta antalet kronor som man inte kan betala med i affären? Endast svar krävs.

I första versionen av frågan fanns inte formuleringen om växel med. Utan den formuleringen blir frågan helt irrelevant eftersom man alltid kan finna ett antal x 7-kronors poletter och y 11-kronors poletter så vi kan bilda ett godtyckligt belopp K. Anledningen till detta är att vi tillåter även negativa värden på x och y och då har ekvationen $7x+11y = K$ lösningar (x, y) för varje heltal K.

Vi utgår från att de positiva heltalen a, b är relativt prima.[1] Då har ekvationen $ax + by = K$ en lösning för varje värde på K. Frågan är för vilka $K > 0$ vi inte har några positiva heltalslösningar, d.v.s. x eller y är negativt.

Vi formulerar om problemet som att finna det största talet K som inte finns i mängden

$$S = \{ax + by \mid x \geq 0, y \geq 0,\ x, y \text{ heltal}\}$$

För att finna K begränsar vi oss dock till mängden.

$$M = \{ax + by \mid x = 0, 1, \ldots b-1, y = 0, 1, 2, \ldots, a-1\}$$

Denna mängd innehåller ab stycken tal och vi skall först visa att de alla är unika räknat kongruent modulo ab. Detta gör vi genom ett motsägelsebevis. Antag att vi har $x \neq X$ och $y \neq Y$, men ändå gäller $ax + by = aX + bY$ och $0 \leq X \leq b-1$ och $0 \leq Y \leq a-1$. Då får vi

$$a(x - X) + b(y - Y) \equiv 0 \text{ mod } ab$$

Då SGD$(a, b) = 1$ innebär det att ab delar $a(x-X)+b(y-Y)$, d.v.s. $b|(x - X)$ och $a|(y - Y)$ vilket vi antog inte var fallet.

Innan vi går vidare introducerar vi två mängder:

$$\begin{aligned} A =& \{0, 1, 2, \ldots, ab-1\} \\ B =& \{ab, ab+1, ab+2, \ldots 2ab-1\} \end{aligned}$$

Vi fick alltså fram ab stycken tal i M som alla är olika kongruent modulo ab. Talen är även mindre än $2ab$. Ett tal som finns i M finns alltså antingen med i A eller iB.

Det gäller dock att varje tal i $e \in B$ faktiskt även finns med i M eller så ligger det i S. Om $e \in M$ så är vi klara. Om $e \notin M$ så gäller att det finns ett tal $f \in A$ så att $e \equiv f$ mod ab och $f \in M$. Detta följer av att e och f är kongruenta modulo ab och då gäller antingen $e \in M$ eller $f \in M$.

Eftersom $f \in A$ så finns x och y så $f = ax + by$ och då är $e = ax + by + ab = a(x + b) + by$. Vi har alltså $B \subset S$. Alla andra tal i S är större än talen i B och vi kan få fram varje större tal i S genom att lägga till multiplar av ab.

Talet K vi söker är därför det största tal som finns i A men inte i M. Men om talet K finns i A men inte i M så finns talet $K + ab$ i B och därmed även i M. Det största tal vi har i $B \cap M$ är då kongruent med det största tal vi *inte* har i $A \cap M$.

Detta tal är $a(b-1) + b(a-1) = 2ab - a - b \equiv ab - a - b$ mod ab, d.v.s. $K = ab - a - b = (a-1)(b-1) - 1$

I uppgiften är $a = 7$ och $b = 11$ vilket ger $K = 6 \cdot 10 - 1 = 59$.

4.1 Svaret

I svaret som nu har publicerats nämner de att man kan bilda de sju konsekutiva talen 60, 61, 62, ..., 66 och alla efterföljande tal kan bildas genom att addera till ett antal 7:or.

$$\begin{aligned} 60 =& 7 \cdot 7 + 11 \\ 61 =& 4 \cdot 7 + 3 \cdot 11 \\ 62 =& 7 + 5 \cdot 11 \\ 63 =& 9 \cdot 7 \\ 64 =& 6 \cdot 7 + 2 \cdot 11 \\ 65 =& 3 \cdot 7 + 4 \cdot 11 \\ 66 =& 6 \cdot 11 \end{aligned}$$

[1] Varför de måste vara relativt prima lämnas som övning till läsaren att lista ut. Det är enkelt gjort.