

Täljaren

— Matematiskt dividerande —

Gunnar Lindholm / www.taljaren.se

februari 2006

1 Om symbolhanterande räknare

Tydiligen skall symbolhanterande räknare bli tillåtna på de nationella proven fr.o.m. ht 2007. Är det bara jag som inte förstår hur det utvecklar matematikundervisningen (som skolverket säger att det gör)?

Jag ser fyra saker som räknaren ersätter eller kan göra

1. aritmetik för hand
2. rita kurvor för hand
3. hantera algebraiska uttryck
4. upptäcka "intressanta" saker

Först en allmän kommentar. Matematiken i skolan handlar tyvärr för ofta om att få samma svar som står i facit. Det vore trevligt ifall det logiska tänkandet och förståelsen för matematiken fokuserades mer. Jag betvivlar starkt att så blir fallet med CAS och symbolhanterare, och då inte bara på det nationella provet.

Vidare anser jag att i de tre första punkterna används räknare för att komma snabbare från A till B. D.v.s. när du vet vad du skall göra och vet att inget spännande händer på vägen, så kan du ta en genväg för att slippa en tidsödande transportsträcka som inte tillför något. Det är under dessa premisser som du får använda räknaren. Annars gör du bara som du gjort innan men vet inte varför.

Det som går fel är att räknaren tar över elevens tänkande. Att de räknar ut $0 \cdot 4$ på räknaren är väl urtypen för detta. Att beräkna kvadratrötter kan vara nyttigt att testa på, men efter ett tag så blir man säker på detta och vet när man kan ta genvägar.

Ritandet av kurvor ger snabbt en grafisk bild av en funktion och "räknarens bild säger mer än tusen ord men mindre än en formel". Här är balansgången mellan att få visuella intryck och känslan för funktioner viktig. Att förstå asymptoter, nollställen och symmetrier är det viktiga, räknaren kan vara ett hjälpmedel för att nå dit.

Räknaren ger oss också tillgång till numeriska metoder som klarar av saker som vi inte klarar att lösa exakt, men även dessa kan bara användas när man vet vad man håller på med.

Så kommer vi till de algebraiska manipulationerna. Här vill jag hävda att symbolhanterande räknare är fördärvande för eleverna. Dels saknar de förtrogenheten så de vet inte alltid hur de skall ta sig från A till B och har dålig uppfattning om vad som händer på vägen dit. Dessutom gömmer räknaren allt som sker på vägen vilket iofs är meningen med transportsträckan, men som jag inte tycker är någon vinst på den här nivån.

1.1 När kan man använda symbolhanteraren?

Kan det vara för att lösa ekvationer? Vilka då isåfall? Polynomekvationer med högre gradtal löses lämpligare genom att först försöka med knep (dubbelrötter, delbarhet, bestämma antalet reella rötter o.s.v.) och om det inte leder någon vart så är det ett numeriskt arbete kvar. Övriga ekvationer löses exakt eller numeriskt.

Kan det vara för att förenkla uttryck? Vilka då isåfall? Det måste vara de som ser besvärliga ut och har många termer isåfall. Resten skall eleverna klarar av för hand. Men då frågar jag mig, vad är det för vits med att lära sig knappa in stora uttryck och få fram ett förenklat svar? Någon får gärna förklara vad det är för spännande att få veta att

$$(x + 1)^4 + 4x = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 + 8$$

har lösningen $x = 2$? Vad händer på vägen? Knappast får man någon insikt i binomialutvecklingen av $(x + 1)^4$. Kvadratkompletering ger förståelse, pq -formeln är en genväg när man har förståelsen och vet vad man gör.

Datorn gömmer allt som händer. Du ser vad som händer om du multiplicerar

$$(x + 1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1).$$

Här får man också frågan, finns det inte ett smartare sätt att multiplicera de fyra faktorerna? Pascals triangel klickar runt hörnet, men för att upptäcka den och se tjusningen i den krävs först blod, svett och tårar.¹

Men om man nu har gjort allt detta roliga för hand och fått förståelse, kan man inte då börja använda CAS och symbolhanterare? Jovvist, tyvärr är gymnasietiden förmodligen över vid det laget.

Är datorn och symbolräknaren då till för att förenkla för eleven? Så att eleven skall slippa göra lite enklare algebraiska manipulationer? Skall vi ta bort glädjen med att själv kunna faktorisera, se mönster, och kunna förkorta bort saker? Är det bara jag som blir lite spänd när man har ett stort uttryck och man kan börja förkorta bort saker och ting till höger och vänster? Blir det något kvar? Spännande!

Vad händer när datorn svarar att funktionen

$$f(x) = \frac{x + 1}{x + 1}$$

kan skrivas som $f(x) = 1$? Jag tvivlar på att de har den förtrogenhet med algebra som behövs för att datorn skall vara

¹Det är kanske inte så pedagogiskt att kräva just dessa ingredienser, men jag kände ett behov av att låna från Churchill.

till någon hjälp till att ta genvägar. Det är fel nivå att introducera sådana verktyg på eftersom de saknar förtrogenhet och förståelse.

Dessutom gömmer ett sådant verktyg allt intressant. Om man använder miniräknaren för att få fram $1/7 = 0,142857142857142857$ eller ännu fler decimaler med CAS så ser man aldrig när man får fram resten 1 och decimalerna upprepar sig! Är inte det en sorglig förlust? Lika sorgligt är det att gå baklänges från en periodisk decimalutveckling till ett bråk med datornhjälp utan att veta vad det är som händer.

Det går säkert att få sitt hjälpmedel att berätta vad det är som händer, och man kan säkert förstå det när man lärt sig något om t.ex. Gröbner baser.

Intressantare är då för duktiga elever att programmera sitt egna symbolhanterande program. Är det då ett datorprogram som "pedagogiskt" flyttar runt termer hit och dit på skärmen och visar hur något förenklas som man vill ha? Då pratar vi om något helt annat.

Knappar du in

$$\sqrt{6 + \sqrt{32}} + \sqrt{6 - \sqrt{32}}$$

så får du 4. Men är det exakt 4 eller 3.99999982...? Vad lär de sig på att bli knapptryckare som kan skriva av ett svar?

Tyvärr, jag ser verkligen inget användningsområde för det verktyget då man håller på att lära sig matematik på gymnasiet.

Punkt 4 vill jag också kommentera. Att använda det för "forskning" är något som definitivt ligger utanför gymnasietnivå. Om man ändå vill "upptäcka" saker, låt oss t.ex. betrakta en serie som har summan π . Det är ett rent numeriskt arbete för att se konvergensen. En symbolhanterare ger svaret π direkt. Vad är skillnaden mot att slå upp serien i en bok istället? Hur vet du vilken serie du skall knappa in i dosan förresten? Mycket att upptäcka, eller hur?

Förvisso kan räknaren snabbt visa roliga saker, t.ex. Taylorutveckling är ju festligt att se presenteras visuellt, men därefter återstår manuell derivering. Vad är det utvecklade med att knappa in ett kommando liknande

```
taylor(sin(x), x, 0, 5)
```

egentligen? Det står något om att eleverna skall få uppleva glädjen med matematik och jag tror å det bestämdaste att det är roligare att få stängas med något, t.ex. ett komplicerat uttryck än att bara trycka på knappar och inte veta varför man gör det.

Jag är verkligen inte för CAS eller symbolhanterare på den här nivån. Idag tror de mer på facit än sin egna förmåga. Vad händer om datorn ger ett annat svar än det som står i facit?

Vad är vitsen att lösa ett problem genom att knappa in siffror i rätt ordning när du egentligen inte vet vad du håller på med?

1.2 *Konsten att fatta sig kort*

Jag har skickat in detta till Nämnaren. Vi får se om de trycker allt detta svammel!